Théorème : (Inégalité de Jensen)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe et $n \in \mathbb{N}^*$.
$\forall a_1,\ldots,a_n \in I, \forall \lambda_1,\ldots,\lambda_n \in \mathbb{R}^+$ tels que $\lambda_1+\cdots+\lambda_n = 1$ on a :
$f(\lambda_1 a_1+\cdots+\lambda_n a_n) \le \lambda_1 f(a_1)+\cdots+\lambda_n f(a_n)$.

Démonstration:

Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$:

Pour $n = 1$: ok

Pour $n = 2$: $\lambda_1+\lambda_2 = 1$ permet d'avoir $\lambda_1 = \lambda$ et $\lambda_2 = 1-\lambda$ avec $\lambda \in [0,1]$.

On reconnaît alors l'inégalité définissant la convexité.

Supposons la propriété établie au rang $n \ge 1$.

Soit $a_1,\ldots,a_{n+1} \in I$ et $\lambda_1,\ldots,\lambda_{n+1} \in \mathbb{R}^+$ avec $\lambda_1+\cdots+\lambda_{n+1} = 1$.

Montrons $f(\lambda_1 a_1+\cdots+\lambda_{n+1} a_{n+1}) \le \lambda_1 f(a_1)+\cdots+\lambda_n f(a_n)+\lambda_{n+1} f(a_{n+1})$.

Si $\lambda_{n+1} = 1$ alors $\lambda_1 = \ldots \lambda_n = 0$: ok

Si $\lambda_{n+1} \neq 1$ alors écrivons $\lambda_1 a_1+\cdots+\lambda_n a_n+\lambda_{n+1} a_{n+1} = \mu a+(1-\mu)b$ avec

$\mu = 1-\lambda_{n+1}$, $b = a_{n+1}$ et $a = \dfrac{\lambda_1}{\mu}a_1+\cdots+\dfrac{\lambda_n}{\mu}a_n = \mu_1 a_1+\cdots+\mu_n a_n$ en posant $\mu_1 = \dfrac{\lambda_1}{\mu},\ldots,\mu_n = \dfrac{\lambda_n}{\mu}$.

On a $\mu_1,\ldots,\mu_n \ge 0$ et $\mu_1+\cdots+\mu_n = 1$.

$$\begin{aligned} f(\lambda_1 a_1+\cdots+\lambda_{n+1} a_{n+1}) &= f(\mu(\mu_1 a_1+\cdots+\mu_n a_n)+(1-\mu)a_{n+1}) \\ &\le \mu f(\mu_1 a_1+\cdots+\mu_n a_n)+(1-\mu)f(a_{n+1}) \\ &\underset{HR}{\le} \lambda_1 f(a_1)+\cdots+\lambda_n f(a_n)+\lambda_{n+1} f(a_{n+1}) \end{aligned}$$

Récurrence établie.